Игровой подход к управлению портфелем с учетом издержек и торговых ограничений

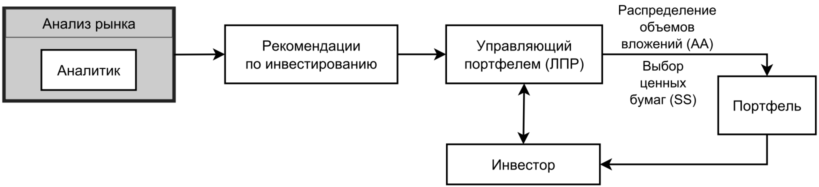
Андреев Н.А.

НИУ ВШЭ
Лаборатория по финансовой инженерии и риск-менеджменту

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики
кафедра системного анализа

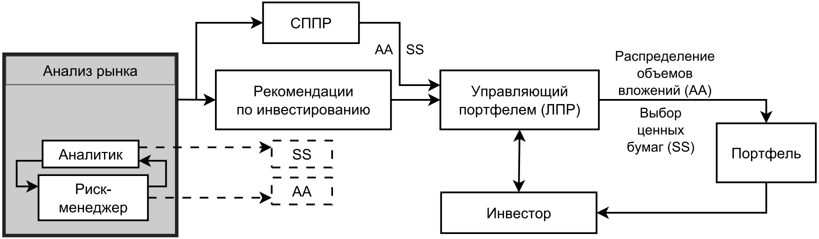
13 мая, 2014

Традиционная схема инвестиционного менеджмента



Задачей управляющего является нахождение оптимальной стратегии управления. Критерии оптимальности определяются как управляющим, так и клиентом (инвестором). Возможно наличие торговых (фазовых) ограничений и конечных условий (оптимальное занятие/ликвидация позиции).

Схема инвестиционного менеджмента с использованием СППР



Разделение функций аналитика (A) и риск-менеджера (RM): (A) отвечает за определение ожидаемой доходности актива, (RM) за отклонение от оценки (A) и торговые ограничения. Решение о величине издержек может приниматься совместно.

- Критерием оптимальности является максимизация заданной функции полезности $J(\cdot)$, удовлетворяющей стандартным условиям.
- Реструктуризация портфеля производится в заданные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_N$ (пересмотр стратегии).
- Минимальное число предположений о рынке. Задание не самих параметров, а представлений о них.
- Учет издержек за совершение операций.
- Обобщение на случай нескольких активов.

Постановка задачи инвестирования
Одномерный случай

X_n, Y_n — цена рискового и безрискового актива в момент t_n.

r_n — безрисковая ставка.

H_n^X, H_n^Y — объемы позиций.

$W^X = H^X X, W^Y = H^Y Y$ — рыночная стоимость позиций без учета издержек. $W = W^X + W^Y$ — капитал портфеля.

Функция полезности $J = J(W_N)$:

1. вогнута на $\mathbb{R}$;
2. монотонно возрастает.

Функция издержек $C(H_n^X, \boldsymbol{\theta}_n; \mathcal{F}_n)$

1. выпукла по H^X (всегда верно на рынке, движимом заявками);
2. неотрицательна.

$$\Delta Y_n = (1 + r_n \Delta t_n) Y_{n-1},$$

$$\Delta X_n = (\mu_n \Delta t_n + \sigma_n \sqrt{\Delta t_n}) X_{n-1},$$

Пусть $\mathbf{\Theta} = (r, \mu, \sigma, \ldots) \in \mathbb{R}^P$ — набор всех неизвестных параметров модели. Предполагается, что $\mathbf{\Theta}_n \sim \mathbb{Q}_n$, $\mathbb{Q}_n = \left\{ Q \colon \mathbb{R}^P \to [0; 1], \operatorname{supp} \mathbb{Q} = \mathcal{K}_n \right\}$, $\mathcal{K}_n$ — компактное декартово произведение в $\mathbb{R}^P$.

Функция цены $V_n = \mathbb{E}_n J(W_N)$.

Уравнение Беллмана:

$$V_{n-1}(H^X, X, W^Y) = \inf_{Q \in \mathbb{Q}_{n-1}} \sup_{H_n^X \in D_n} \int V_n\Big(H_n^X, [\mu_n \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}] X, \\ W^Y - (H_n^X - H) X - C(H_n^X - H, \mathbf{\Theta}_n)\Big) dQ.$$

Пусть $\mathcal{K}$ — компактное декартово произведение в $\mathbb{R}^P$. Для $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{E} \in K$ и класса мер $\mathbb{Q} = \left\{ Q \colon \mathbb{R}^P \to [0;1], \operatorname{supp} Q \subseteq K \right\}$ рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$\begin{cases} \int\limits_{\mathcal{K}} f(\mathbf{x}) dQ(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf\limits_{Q \in \mathbb{Q}}, \\ \int\limits_{\mathcal{K}} x_i dQ(\mathbf{x}) = E^i, \ i = \overline{1, n}, \\ \int\limits_{\mathcal{K}} dQ(\mathbf{x}) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Theorem

Пусть $f(\mathbf{x})$ является вогнутой функцией на $\mathcal{K}$. Тогда существует мера, сосредоточенная не более чем в $P+1$ угловой точке $\mathcal{K}$, являющаяся решением задачи (1).

Постановка задачи инвестирования
Одномерный случай

Представление о параметрах рынка: $\mathbb{E}\boldsymbol{\Theta}_n = \boldsymbol{E}_n$ и $\mathcal{K}_n$.

$\mathcal{K}_n$ — компакт, значит

$$V_{n-1}(H^X, X, W^Y) = \sup_{H_n^X \in D_n} \inf_{Q \in \mathbb{Q}_{n-1}(\boldsymbol{E}_n)} \int V_n\Big(H_n^X, [\mu_n \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}]X,$$
$$\big(W^Y - (H_n^X - H)X - C(H_n^X - H, \boldsymbol{\theta}_{n-1}, X)\big) r_n \Delta t\Big) dQ =$$
$$= \sup_{H_n^X \in D_n} \sum_{i=1}^{P+1} p_i V_n\Big(H_n^X, X(\mathbf{A}_n^i(H_n^X)),$$
$$\big(W^Y - (H_n^X - H)X - C(H_n^X - H, \mathbf{A}_n^i(H_n^X))\big) r_n \Delta t\Big),$$

где $\mathbf{A}_n^1(H_n^X), \ldots, \mathbf{A}_n^{P+1}(H_n^X)$ — угловые точки $\mathcal{K}$. Выбор $P+1$ точки из 2^P зависит от H_n^X.

Пример: μ_n, r_n известны точно, $\sigma_n \in [\underline{\sigma}_n; \overline{\sigma}_n]$, $\mathbb{E}\sigma_n = E_n$.
$C(H_n^X, \boldsymbol{\theta}_n; \mathcal{F}_n) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&V_{n-1}(H^X, X, W^Y) = \\
&\sup_{H_n^X \in D_n} \Big[p_1 V_n\Big(H_n^X, X(1+\mu_n \Delta t_n + \underline{\sigma}_n \sqrt{\Delta t}), \big(W^Y - (H_n^X - H)X\big) r_n \Delta t\Big) + \\
&\quad + p_2 V_n\Big(H_n^X, X(1+\mu_n \Delta t_n + \overline{\sigma}_n \sqrt{\Delta t}), \big(W^Y - (H_n^X - H)X\big) r_n \Delta t\Big)\Big].
\end{aligned}
$$

Постановка задачи инвестирования
Обобщение на многомерный случай

$$\Delta Y_n = (1 + r_n \Delta t_n) Y_{n-1},$$

$$\Delta \mathbf{X}_n = \boldsymbol{\mu}_n \mathbf{X}_{n-1} \Delta t_n + \boldsymbol{\sigma}_n \mathbf{X}_{n-1} \sqrt{\Delta t_n},$$

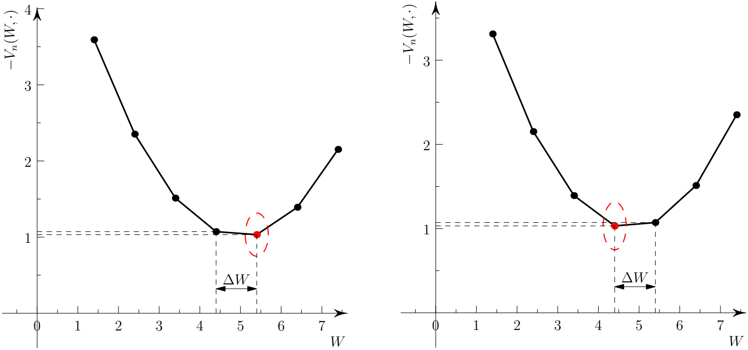
где $\mathbf{X}_n \in \mathbb{R}^m_+$; $\boldsymbol{\mu}_k = \mathrm{diag}(\mu^1_k, \ldots, \mu^m_k) \in \mathbb{R}^{m \times m}$,
$\boldsymbol{\sigma}_k = \mathrm{diag}(\sigma^1_k, \ldots, \sigma^m_k) \in \mathbb{R}^{m \times m}_+$ — диагональные матрицы.

Уравнение Беллмана:

$$V_{n-1}(\mathbf{H}, \mathbf{X}, W^Y) = \inf_{Q_{n-1} \in \mathbb{Q}_{n-1}} \sup_{\mathbf{H}^X_n} \int V_n \Big(\mathbf{H}^X_n, [\boldsymbol{\mu}_n \Delta t + \boldsymbol{\sigma} \sqrt{\Delta t}] \mathbf{X},$$
$$\big(W^Y - (\mathbf{H}^X_n - \mathbf{H}) X - C_{n-1}(\mathbf{H}^X_n - \mathbf{H}, \boldsymbol{\Theta}_{n-1}) \big) r_n \Delta t \Big) dQ_{n-1}.$$

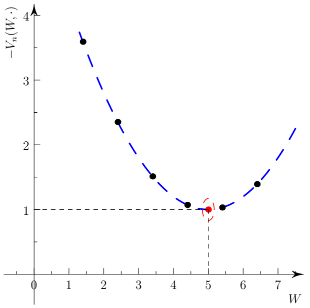
Численное решение уравнения Беллмана: функция цены должна быть вычислена в $|\mathbf{H}^X|^m \cdot |W^Y| \cdot \frac{N^m(N+1)^m}{2^m}$ точках, при этом решается $|\mathbf{H}^X|^m \cdot |W^Y| \cdot \frac{N^m(N-1)^m}{2^m}$ задач максимизации и вычисляется $\frac{N^m(N-1)^m}{2^m} C_{2m}^{m+1}(m+1)$ определитель размерности m.

Рассмотрим случай без издержек, 1 актив. Проблема поиска минимума на одномерной грубой сетке:



Постановка задачи инвестирования
Обобщение на многомерный случай

Достижение устойчивости за счет не линейной, а сплайновой интерполяции. Необходимо сохранение выпуклости для существования экстремума:



Для одномерного случая аппроксимация рациональными сплайнами с сохранением выпуклости.

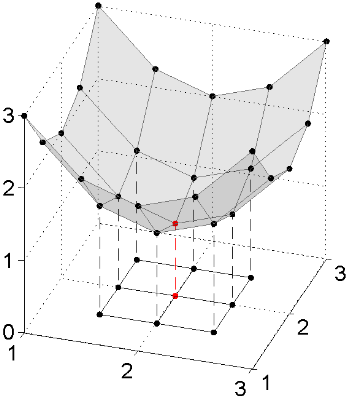
Интерполяция: $x \in [x_i; x_{i+1}]$

$$u_i(x) = \frac{(x_{i+1} - x)f_i + (x - x_{i+1})f_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} - \\ - \frac{1}{\frac{1}{(x - x_i)(\Delta f_i - g_i)} + \frac{1}{(x_{i+1} - x)(g_{i+1} - \Delta f_i)}},$$

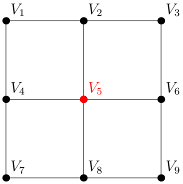
$$g_i = \frac{h_i \Delta f_{i-1} + h_{i-1}\Delta f_i}{h_{i-1} + h_i}, \quad h_i = x_{i+1} - x_i.$$

Экстраполяция: экспоненциальная функция — сохранение выпуклости.

Постановка задачи инвестирования
Обобщение на многомерный случай



В качестве минимума берется средневзвешенное минимума на сетке и соседних точек:



$$\mathbf{X}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}.$$

Если заданы неточные значения

$$V_i(\varepsilon_i) = V_i(1+\varepsilon_i) \quad |\varepsilon_i| \le \beta,$$

то

$$|\mathbf{X}^*(\varepsilon) - \mathbf{X}^*| \le \frac{\beta}{1-\beta}.$$

Оценка входных параметров
Байесовский подход к оцениванию

Пусть r — известная константа. Перед принятием решения о реструктуризации СППР получает на вход оценки μ и $\underline{\sigma}, \overline{\sigma}$.

Задача аналитика — определение $\hat{\mu}_A$ на основе фундаментального, технического анализа, экспертного метода.

Задача риск-менеджера — определение $\hat{\underline{\sigma}}_{RM}, \hat{\overline{\sigma}}_{RM}$. Расчетная оценка — байесовский подход: предполагается, что подлежащий процесс цены принадлежит известному классу, тогда $\hat{\underline{\sigma}}_{RM}, \hat{\overline{\sigma}}_{RM}$ — границы доверительного интервала на заданном уровне надежности α.

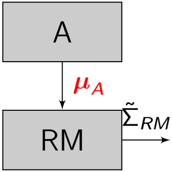
На периоде обучения $\boldsymbol{\mu}_n = \boldsymbol{\mu}$, $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}$.

$$\mathbf{Z}_k = \frac{\Delta \mathbf{X}_k}{\mathbf{X}_{k-1}} = \boldsymbol{\mu}\Delta t + \boldsymbol{\sigma}\sqrt{\Delta t}.$$

Вместо $\mathbf{Z}_k$ предполагаем, что рассматриваем обучающую выборку $\tilde{\mathbf{Z}}_k \sim \mathcal{N}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\Sigma})$ из n элементов. Предполагаем, что supp Z — доверительный интервал $\tilde{\mathbf{Z}}$ на уровне α.

Поскольку $\boldsymbol{\mu}$ может определяться А на более раннем этапе (экспертно, расчетно), так и при байесовском оценивании, возможно несколько вариантов взаимодействия А и RM.

Схема 1:



Экспертная оценка μ, расчетная оценка Σ.

$\tilde{\mu}_{RM} = \mu_A$. Оцениваем $\tilde{\Sigma}_{RM}$ как матрицу ковариаций при известном матожидании.

Априорное распределение:

$$\mathcal{W}(\nu, V), \ \nu > m - 1.$$

Апостериорное распределение:

$$\mathcal{W}(\nu', V'),$$

$$\nu' = \nu + n, V' = V + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i.$$

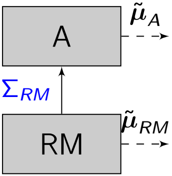
MAP:

$$\tilde{\Sigma}_{RM} = \frac{V'}{\nu' - m - 1}.$$

Оценка входных параметров

Байесовский подход в контексте инвестиционного менеджмента

Схема 2:



Экспертная оценка Σ, расчетная оценка μ. Возможна оценка μ как A, так и RM с дальнейшим сведением.

$\tilde{\Sigma} = \Sigma$. Оцениваем $\tilde{\mu}$ как матожидание при известной матрице ковариаций.

Априорное распределение:

$$\mathcal{N}(\theta, \Sigma_0).$$

Апостериорное распределение:

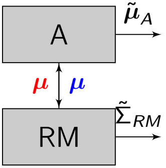
$$\mathcal{N}(\theta', \Sigma_0'),$$

$$\theta' = (\Sigma_0^{-1} + n\Sigma^{-1})^{-1}(\Sigma_0^{-1}\theta + n\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{Z}}),$$
$$\Sigma_0' = \Sigma_0 + n\Sigma.$$

MAP:

$$\tilde{\mu}_{RM} = \theta'.$$

Схема 3:



Расчетная оценка Σ, экспертная оценка μ корректируется с учетом расчетной. Определяется соответствие экспертной оценки рыночным данным.

Оцениваем $\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma}$ как параметры нормального распределения с неизвестными матожиданием и дисперсией.

Априорное распределение: $\mathcal{NW}(\theta, \kappa, \nu, \Sigma_0)$.
Апостериорное распределение: $\mathcal{NW}(\theta', \kappa', \nu', \Sigma_0')$,

$$\theta' = \frac{\kappa\theta + n\bar{\mathbf{Z}}}{\kappa + n},$$

$$\kappa' = \kappa + n, \quad \nu' = \nu + n,$$

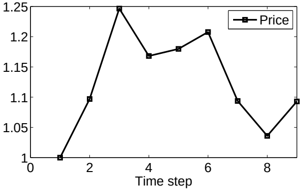
$$V' = V + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{Z}_i - \bar{\mathbf{Z}})(\mathbf{Z}_i - \bar{\mathbf{Z}})^T + \frac{\kappa n}{\kappa + n}(\theta - \bar{\mathbf{Z}})(\theta - \bar{\mathbf{Z}})^T.$$

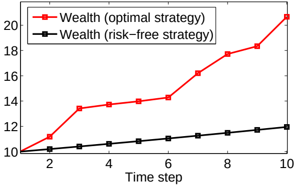
MAP: $$\tilde{\mu}_{RM} = \theta',$$

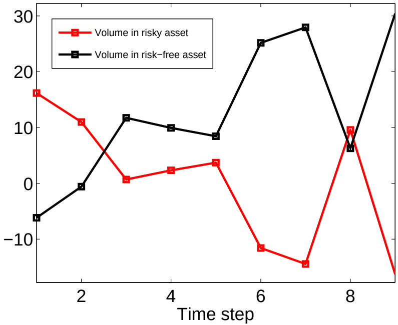
$$\tilde{\Sigma}_{RM} = \frac{V' + \kappa'(\tilde{\mu}_{RM} - \theta')(\tilde{\mu}_{RM} - \theta')^T}{\nu' - m}.$$

Результаты моделирования

Оптимальная стратегия

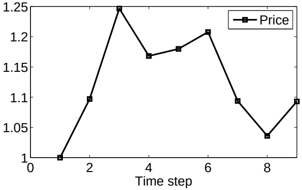


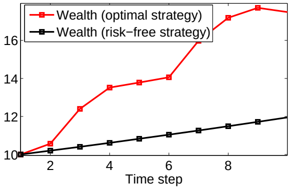


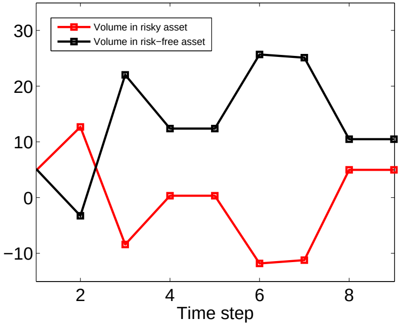


Суммарный объем сделок 89.75.

Результаты моделирования
Оптимальная стратегия

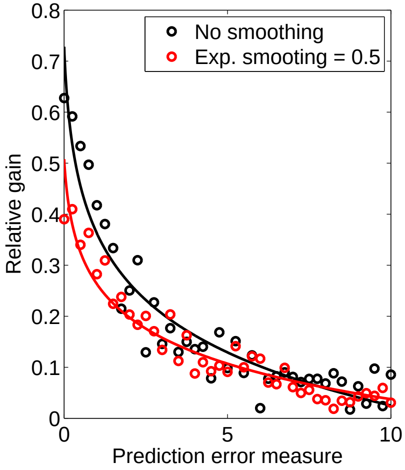






Суммарный объем сделок 66.71.

Результаты моделирования
Зависимость от предсказательной силы аналитика



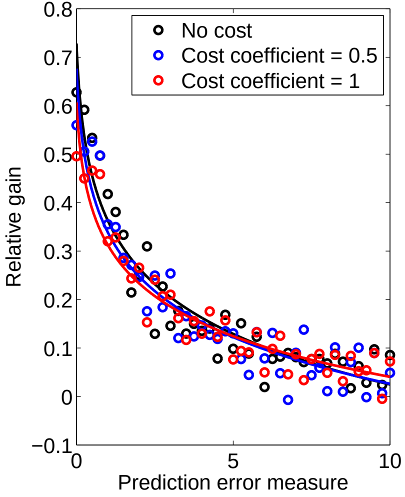
$$\frac{W - W_b}{W_b} \approx a - b \log \epsilon,$$

где ϵ — предсказательная сила:

$$\left| \frac{\tilde{\mu}_{A,n} \mid \mathcal{F}_{n-1} - \mu_n}{\mu_n} \right| \sim \mathcal{N}(0, \epsilon^2).$$

Эффект от экспоненциального сглаживания негативный. Эффект от сглаживания нивелируется с увеличением ошибки прогноза.

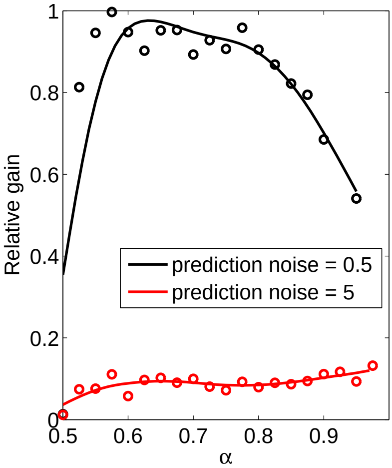
Распределение относительной доходности — логнормальное.



Бóльшие издержки ведут к мéньшей прибыли, но нивелируются при больших ошибках прогноза.

Требуется бóльшая выборка для получения точной информации.

Результаты моделирования
Зависимость от предсказательной силы и квантили α



Ограничения на $\boldsymbol{\sigma}$, выставляемые риск-менеджером, приводят к увеличению средней прибыли. Слишком жесткие ограничения (большое неприятие риска) нивелируют положительный эффект работы аналитика и снижают результативность стратегии.

При малой предсказательной силе жесткие ограничения практически не снижают результативность.

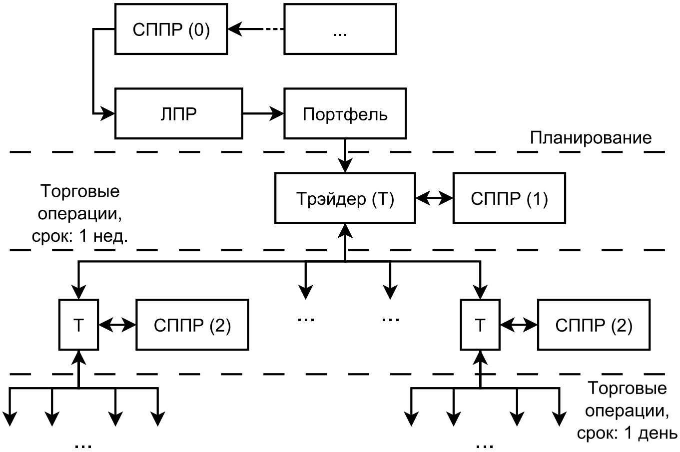
Сравнение подходов

	Дискр. время	Неск. акт.	Гипотеза GBM	Торговые ограничения	Вид J
Merton (1969)	нет	да	да	нет	CRRA
Samuelson (1969)	да	да	да	нет	CRRA
Karatzas-Schreve et al. (1986)	нет	да	да	да, огр. на потребление	HARA
Eastham-Hastings (1988)	нет	да	да	нет	Общего вида
Davis-Norman (1990)	нет	нет	да	нет	CRRA
Almgren-Chriss (2001)	да	нет	нет, нез. приращения с нулевым м.о.	нет	Markowiz
Obizhaeva-Wang (2005)	нет, имп. упр-е	нет	да	конечное условие	Markowiz
Alfonsi-Schied-Fruth (2010)	нет, имп. упр-е	нет	нет, BM	нет	Мин. издержек
Predoiu-Shreve (2011)	нет	нет	независ.	нет	Мин. издержек
Fruth et al (2013)	рассм. обе модели	нет	независ.	рассм. конечное условие	Мин. издержек
Lillo-Busseti (2013)	да	нет	нет, нез. приращения с нулевым м.о.	конечное условие	Markowiz
Игровой подход	да	да	нет	Произвольные огр.	Общего вида

Сравнение подходов

	Учет изд-к	Подход к мод-ю	Стох. изд-ки	Завис. от прошлого	Стац-ть
Merton (1969)	нет	-	-	-	-
Samuelson (1969)	нет	-	-	-	-
Karatzas-Schreve et al. (1986)	нет	-	-	-	-
Eastham-Hastings (1988)	нет	-	-	-	-
Davis-Norman (1990)	да	линейн.	нет	нет	да
Almgren-Chriss (2001)	да	линейн.	нет	да (PPI)	да
Obizhaeva-Wang (2005)	да	линейн. PPI, TPI, эксп. релакс., плоск. LOB	нет	да (PPI, релакс.)	да
Alfonsi-Schied-Fruth (2010)	да	релакс., непр. LOB(D)	нет	да (релакс.)	да
Predoiu-Shreve (2011)	да	релакс., càdlàg LOB(D)	нет	релакс.	да
Fruth et al (2013)	да	линейн. PPI, TPI, общ. релакс., плоск. LOB	да	да	нет
Lillo-Busseti (2013)	да	нелинейн. PPI, TPI, общ. релакс.	нет	да	да
Игровой подход	да	допуск. изд-ки общ. вида	допуск. стох.	да	нет

Иерархия моделей при управлении портфелем



СППР может использоваться с учетом микроструктуры (трэйдинг внутри дня) и без (планирование). На каждом уровне свое понятие издержек и цены активов.

Текущие задачи

- Доказать достаточное условие выпуклости V:

$$V_n(\mathbf{H}, \mathbf{X}_1, W - a\mathbf{X}_1 - C(a, \mathbf{H}_1)) - V_n(\mathbf{H}, \mathbf{X}_2, W - a\mathbf{X}_1 - C(a, \mathbf{H}_1)) \geq$$

$$\geq V_n(\mathbf{H}, \mathbf{X}_1, W - a\mathbf{X}_2 - C(a, \mathbf{H}_2)) - V_n(\mathbf{H}, \mathbf{X}_2, W - a\mathbf{X}_2 - C(a, \mathbf{H}_2)) \quad \forall H, a, W.$$

- Численное решение многомерной задачи, сравнение с бенчмарком (индекс РТС — размерность не менее 101!). $C\#$ для ДП, MatLab для всего остального.
- Performance measurement.

Список используемой литературы

Sharpe W. F., Alexander G. J., Bailey J. V. Investments. 5th edition. Prentice Hall, 1994. P. 900. ISBN: 780131037717.

Bacon C. R. Practical Portfolio Performance Measurement and Attribution. 2nd edition. Wiley Finance, 2008. P. 384. ISBN: 9780470059289.

Delbourgo R., Gregory J. Shape preserving piecewise rational interpolation // SIAM journal on scientific and statistical computing. 1985. Vol. 6, no. 4. P. 967–976. URL: http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0906065.

Список используемой литературы (cont.)

Delbourgo R. Shape preserving interpolation to convex data by rational functions with quadratic numerator and linear denominator // IMA journal of numerical analysis. 1989. Vol. 9, no. 1. P. 123–136. URL: http://imajna.oxfordjournals.org/content/9/1/123.short.

Kuijt F. Convexity Preserving Interpolation - Stationary Nonlinear Subdivision and Splines: Ph. D. thesis / Universiteit Twente. 1998. P. 171. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S01678396980

Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. Москва: Мир, 1974. P. 486.

Артамонов В., Латышев В. Линейная алгебра и выпуклая геометрия. Москва: Факториал Пресс, 2004. P. 160. ISBN: 5-88688-071-2.

Список используемой литературы (cont.)

Merton R. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case // The review of Economics and Statistics. 1969. Vol. 51, no. 3. P. 247–257.

Samuelson P. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming // The Review of Economics and Statistics. 1969. Vol. 51, no. 3. P. 239–246.

Karatzas I., Lehoczky J., Sethi S., Shreve S. Explicit solution of a general consumption/investment problem // Mathematics of Operations Research. 1986. Vol. 11, no. 2. P. 261–294.

Eastham J., Hastings K. Optimal impulse control of portfolios // Mathematics of Operations Research. 1988. Vol. 13, no. 4. P. 588–605.

Список используемой литературы (cont.)

Davis M. H. A., Norman A. R. Portfolio selection with transaction costs // Mathematics of Operations Research. 1990. Vol. 15, no. 4. P. 676–713.

Almgren R., Chriss N. Optimal execution of portfolio transactions // Journal of Risk. 2001. Vol. 3. P. 5–40.

Obizhaeva A., Wang J. Optimal trading strategy and supply/demand dynamics // Journal of Financial Markets. 2013. Vol. 16, no. 1. P. 1–32.

Alfonsi A., Fruth A., Schied A. Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions // Quantitative Finance. 2010. Vol. 10, no. 2. P. 143–157. arXiv:0708.1756v3.

Список используемой литературы (cont.)

Predoiu S., Shaikhet G., Shreve S. Optimal execution in a general one-sided limit-order book // SIAM Journal on Financial Mathematics. 2011. Vol. 2, no. 1. P. 183–212.

Fruth A., Schöneborn T., Urusov M. Optimal trade execution and price manipulation in order books with time-varying liquidity // Mathematical Finance. 2013.

Busseti E., Lillo F. Calibration of optimal execution of financial transactions in the presence of transient market impact // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2012. Vol. 2012, no. 9. P. P09010. arXiv:1206.0682v1.